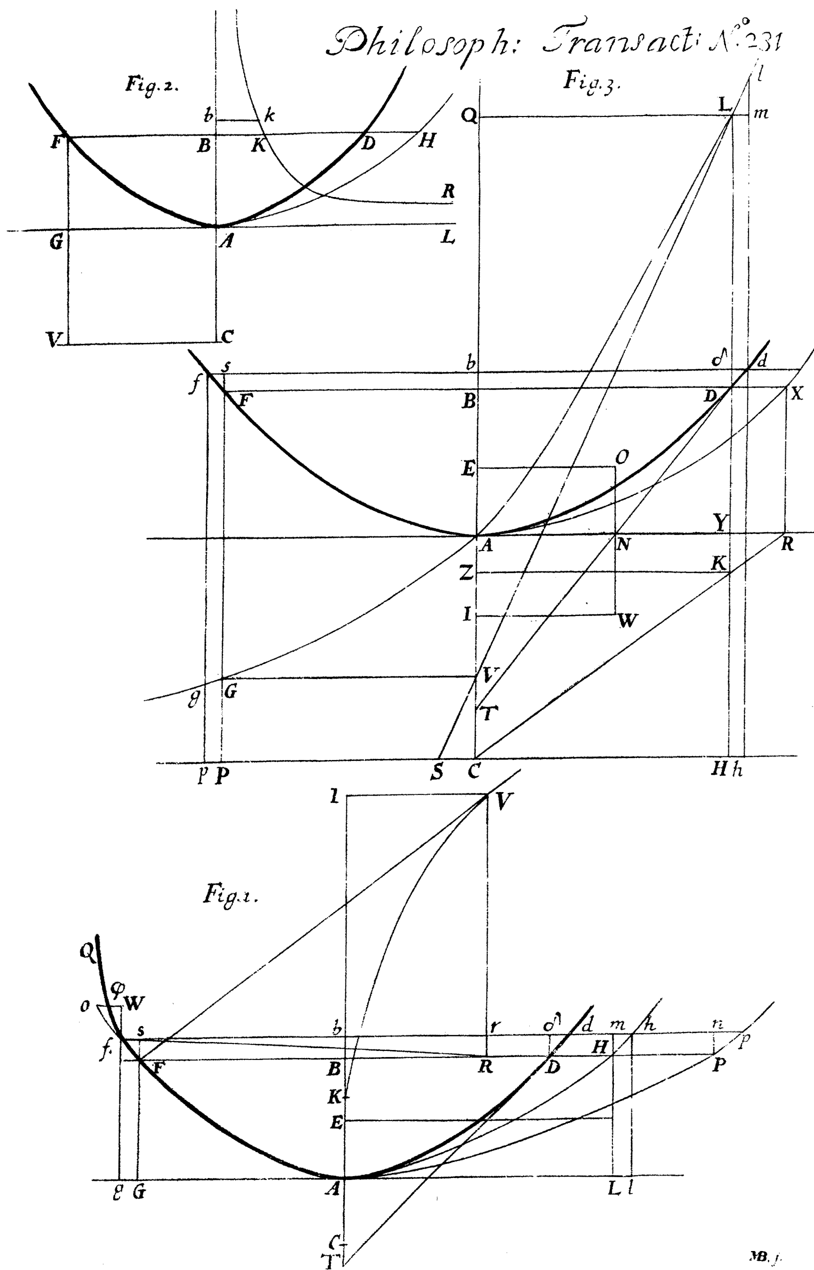
Philosoph: Transact: N.° 231



II.

DAVIDIS GREGORII M. D.

Astronomiæ Professoris *Saviliani* & S. R. S.

CATENARIA,

AD REVERENDUM VIRUM

D. HENRICUM ALDRICH S. T. P.

Decanum Ædis Christi *Oxoniæ*.

CUM Problema de figura Catenæ (id est lineæ flexilis, versus centrum longinquum gravis, & pondere suo dum à duobus extremis immotis dependet incurvatæ) sit inter hujus ævi Philosophos imprimis nobile, ac à Celeberrimis Viris *Hugenio*, *Leibnitio* & *Bernoullio*, plurimæ figuræ istius proprietates fuerint detectæ, & in Actis Eruditorum *Lipsiæ* (at sine demonstratione) editæ: Libuit harum omnium demonstrationes pertexere, ope Methodi *Neutonianæ* Geometris hodie familiaris, fluxiones è fluentium relatione data determinandi & vicissim; & alias insignes Curvæ hujus proprietates nunc primum detectas adjicere, tibique Reverende Decane, harum rerum Judici idoneo mittere.

Prop. I. Problema.

Fig. 1. INvenire relationem inter fluxionem axeos & fluxionem ordinatæ in Curva Catenaria.

Sit Catena F A D ab extremitatibus F & D dependens, cujus punctum imum (seu Curvæ vertex) A, axis A B ad horizontem erectus, eique applicata B D horizonti parallela. Invenien-

da eſt relatio inter Bb ſeu Dδ & dδ; poſito b puncto ipſi B proximo, & bd ad BD, item Dδ ad BA parallela.

Ex Mechanicis conſtat Potentias tres in æquilibrio poſitas eandem habere rationem cum rectis tribus ad ipſarum directiones parallelis, vel in dato angulo inclinatis, à mutuo occurſu terminatis; Adeoque ſi Dd exponat gravitatem abſolutam particulæ Dd (ut in Catena æqualiter craſſa rite fit) dδ repreſentabit gravitatis partem eam quæ normaliter in Dd agit, quaque fit ut dD (ob Catenæ flexilitatem circa d mobilis) in ſitum verticalem ſe componere conatur. Adeoque ſi δd (ſive fluxio ordinatæ BD) conſtans ſit; gravitatis actio in partes correſpondentes Catenæ Dd normaliter exerta etiam conſtans erit ſive ubique eadem. Exponatur hæc per rectam a. Porro ex ſupra citato Lemmate Mechanico, Dδ ſive fluxio axeos AB exponet vim ſecundum directionem ipſius dD exerendam, quæ priori conatui lineæ gravis dD ad componendam ſe in ſitum verticalem æquipolleat, eumque impedire poſſit. Hæc vero vis oritur à linea gravi DA ſecundum directionem dD trahente; eſtque proinde (cæteris manentibus) lineæ DA proportionalis. Eſt igitur δd fluxio ordinatæ ad δD fluxionem abſciſſæ, ſicut conſtans recta a ad DA curvam. q. e. f.

Corollarium.

Si recta DT tangat Catenariam, & axi BA producto occurrat in T, erit DB.BT::(dδ.δD::)a.DA Curvam.

Prop. 2. Theorema.

Fig. 1. SI ad perpendiculum AB tanquam axem, vertice A, deſcribatur hyperbola æquilatera AH, cujus ſemi-axis AC æqualis a; & ad eundem axem & verticem, parabola AP cujus parameter æqualis quadruplo axi hyperbolæ, & producatur ſemper hyperbolæ ordinata HB, donec HF æqualis Curvæ AP: Dico Curvam FAD in quo puncta F & D verſantur (poſitis BD, BF æqualibus) eſſe Catenariam.

Vocetur

Vocetur A B x, erit B b $= \dot{x}$, & BH $= \sqrt{2ax + x^2}$. Unde ex methodo fluxionum, fluxio ipsius B H (sive m h) $= \frac{a\dot{x} + x\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}}$. Rursus quia parabolæ A P parameter $= 8a$, erit B P $= \sqrt{8ax}$. Unde n p (hoc est fluxio ipsius B P) æqualis $\frac{2a\dot{x}}{\sqrt{2ax}}$. Quare fluxio Curvæ A P ($=$ P p $= \sqrt{npq + Pnq}$) $= \sqrt{\frac{4a^2\dot{x}^2}{2ax} + \dot{x}^2}$ $= \sqrt{\frac{2a\dot{x}^2 + x\dot{x}^2}{x}}$ quæ, ducendo tam numeratorem quam denominatorem in $\sqrt{2a+x}$, $=$) $\frac{2a\dot{x} + x\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}}$. Et cum H F sit ubique $=$ A P, erit fluxio H F rectæ, hoc est m h $+$ s f $= \frac{2a\dot{x} + x\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}}$. Sed hactenus inventa est m h $= \frac{a\dot{x} + x\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}}$. Unde s f sive fluxio ipsius B F ordinatæ ad axem Catenariæ, est æqualis $\frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}}$. Et igitur fluxio Curvæ A F (sive ipsa F f $= \sqrt{sfq + Fsq} = \sqrt{\frac{a^2\dot{x}^2}{2ax+x^2} + \dot{x}^2}) = \frac{a\dot{x} + x\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}}$, cujus fluens modo ostensa est $\sqrt{2ax+x^2}$. Et igitur AF $= \sqrt{2ax+x^2}$. Patetque fluxionem ordinatæ B F sive $\frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}}$ esse ad $\dot{x}$ fluxionem abscissæ A B sicut data a ad Curvam A F, quæ est superius inventa Catenariæ proprietas. Igitur Catenariæ puncta recte determinantur per præcedentem constructionem. q. e. d.

Corollaria.

1. Ex constructione patet B F ordinatam Catenariæ æquari Curvæ parabolicæ A P, dempta B H correspondente ordinata hyperbolæ conterminæ A H.

2. Ex demonstratione constat Catenariam Curvam A F æquari B H correspondenti ordinatæ Conterminæ Hyperbolæ æquilateræ. Cum enim harum linearum fluxiones æquentur, & simul nascantur ipsæ lineæ; patet illas ubique esse æquales. Unde datâ catenâ, dabitur A C sive a, quippe æqualis semi-axi Hyperbolæ æquilateræ cujus vertex A, & ordinata ad abscissam A B catenæ A D est æqualis.

3. Catenariæ omnes sunt inter se similes, cum ex simili similium & similiter positarum figurarum constructione generentur. Unde duæ rectæ ad Horizontem similiter inclinatæ per Catenarum vertices ductæ abscindent figuras similes, & Catenarum portiones abscindentibus rectis proportionales.

4. Si Catena Q A D suspendatur à punctis Q & D inæqualiter altis, Curvæ pars F A D eadem manet, ac si ex punctis æquialtis F & D esset suspensa, quoniam nihil refert utrum punctum F affixum sit vel non affixum ad planum verticale.

5. Si Catenæ vis trahens secundum directionem d D exponatur per D d, dividetur, ut vulgo notum, in vim ut d δ secundum directionem horizontalem, & vim ut δ D secundum directionem verticalem: Igitur vis in Catenæ extremo directe accedendi ad axem, est ad vim in eodem descendendi secundum perpendiculum; sive vis sustinentis pars secundum directionem B D agens, est ad ejusdem partem secundum directionem D δ agentem, ut semi-axis Hyperbolæ conterminæ A H ad D A longitudinem Catenæ usque ad verticem Curvæ: Unde datâ Catenâ ratio hæc datur. Et in eadem Catena nunc magis nunc minus laxe suspensa, vis ista Horizontalis est ut Hyperbolæ conterminæ axis, cum D A eadem maneat si extrema æquialta sint.

6. Catena in plano verticali, sed situ inverso, figuram servat nec decidit, adeoque arcum seu fornicem facit tenuissimum: Hoc est sphæræ minimæ rigidæ & lubricæ in inversa Curva Catenaria dispositæ, arcum constituunt cujus nulla pars ab aliis extrorsum vel introrsum propellitur; sed manentibus infimis punctis immotis, virtute suæ figuræ sustinetur. Cum enim punctorum Curvæ Catenariæ situs, partiumque inclinatio ad Horizontem eadem sit, sive in situ F A D, sive in situ inverso, dummodo Curva sit in plano ad Horizontem recto, patet illam æque servare figuram immutatam in uno situ ac in altero. Et è converso

verſo ſolæ Catenariæ ſunt fornices ſive arcus legitimi : Et cujuſcunque alterius figuræ Arcus ideo ſuſtinetur, quod in illius craſſitie quædam Catenaria incluſa ſit : Neque, ſi tenuiſſimus eſſet, parteſque haberet lubricas ſuſtineretur. Ex præcedente Corol. 5. colligitur quali vi arcus, muros quibus inſiſtit extra propellit; nempe hæc eadem eſt cum parte vis Catenam ſuſtinentis, quæ ſecundum directionem Horizontalem trahit. Quæ enim in Catena introrſum trahit vis, in arcu Catenæ æquali, extrorſum propellit. Alia omnia de murorum quibus fornices imponuntur firmitate requiſita, ex hac Theoria Geometrice determinantur, quæ in ædificiorum extructione præcipua ſunt.

7. Si loco gravitatis alia quælibet vis ſimiliter agens in lineam flexilem vires ſuas exerat, eadem producetur linea. V. g. Si ventus æquabilis ſupponatur, & ſecundum rectas datæ poſitione rectæ parallelas ſpirans, linea vento inflata eadem erit cum Catenaria. Nam cum omnia quæ in gravitate conſideravimus, in altera hac vi obtineant, patet eandem Curvam productum iri.

Prop. 3. Theorema.

Fig. 2. SI manente prædicta Hyperbola A H, per A ducatur recta G A L axi A B normalis, & deſcribatur Curva K R ejus naturæ, ut B K ſit tertia proportionalis rectis B H & A C, & ad A C applicetur rectangulum A V æquale ſpatio intermінato A B K R L A, erit F concurſus rectarum H B, V G ad Catenariam.

Nam ex conſtructione eſt $BK = \frac{a^2}{\sqrt{2ax + x^2}}$, quare fluxio ſpatii $ABKRLA = (BKkb = BK \times Bb =) \frac{a^2 \dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}}$. Cumque $BF = \frac{\text{ſpatio } ABKRLA}{AC}$, & A C detur, erit fluxio ipſius $BF = \frac{\text{fluxioni ſpatii } ABKRLA}{AC} = \frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}}$. Sed

in

in præcedentis Prop. constructione, fluxio ordinatæ $B\dot{F}$ $= \frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}}$. Quare hæc constructio eodem redit cum constructione Prop. præcedentis, & consequenter punctum F est ad Catenariam. q. e. d.

Corollarium.

Sicut in Prop. præced. Catenaria describitur ex data longitudine Curvæ parabolicæ, ita in hac, illius descriptio pendet à quadratura spatii in quo $x^2 y^2 = a^4 - 2axy^2$. Nam y (sive BK) $= \frac{a^2}{\sqrt{2ax+x^2}}$.

Prop. 4. Theorema.

Fig. 1. SPatium AGF sub Catenaria AF & rectis FG, AG ad AB, BF parallelis comprehensum, æquale est rectangulo sub semi-axe AC, & DH intervallo applicatarum in Hyperbola & Catenaria.

Nam $D\dot{H} = (B\dot{H} - B\dot{D} =$, ex Prop. 2. hujus, $\frac{a\dot{x}+x\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}} - \frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}} =) \frac{x\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}}$. Quare fluxio rectanguli sub data AC & $D\dot{H} = (\frac{ax\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}} = x \times \frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}} = fs \times FG =)$ fluxioni spatii AGF. Cumque figuræ hæ simul nascantur, sequitur rectangulum sub AC & DH æquari spatio AGF. q. e. d.

Corollarium.

Hinc sequitur spatium FAD, sub Catena FAD & recta Horizontali FD comprehensum, æquari rectangulo sub FD & BA, dempto rectangulo sub Hyperbolæ AH axe alterutro, & DH excessu rectæ BH, vel Curvæ AD, supra ordinatam BD.

Prop.

Prop. 5. Theorema.

Fig. 1. SI ad rectam A L applicetur rectangulum L E æquale ſpatio Hyperbolico A L H, erit E centrum Æquilibrii Curvæ Catenariæ A F D.

Concipiatur Curva gravis F A librari ſuper axe G L. Ex Centrobarycis conſtat momentum gravis F A exponi per ſuperficiem Cylindrici recti ſuper F A erecti, & reſecti plano per G L tranſeunte, cum plano Curvæ angulum ſemirectum faciente. Et hujus ſuperficiei fluxio, ſive $\dot{F}\dot{A} \times F\,G$, æqualis eſt fluxioni ſpatii A L H ſive $\dot{B}\dot{H} \times H\,L$; quia $\dot{F}\dot{A}$, $\dot{B}\dot{H}$, item F G & H L æquantur. Ac propterea (cum ſimul naſcantur) dicta ſuperficies Cylindrici recti æqualis eſt ſpatio Hyperbolico A L H. Hoc proinde applicatum ad ipſum grave A F, vel illi æqualem rectam A L, facit latitudinem A E æqualem diſtantiæ centri gravitatis ab axe librationis G L. Unde Curvæ F A D, æqualiter ad utramque axeos A B partem jacentis, centrum æquilibrii eſt E. q. e. d.

Corollaria.

1. Spatia A B H L, B A H, & A G F ſunt Arithmetice proportionalia. Nam fluxio ſpatii A L H $= \left(\frac{a\dot{x} + x\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}} \times x \right.$ $= \frac{\overline{ax+x^2} \times \dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}} = \frac{\overline{2ax+x^2-ax} \times \dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}} = \dot{x}\sqrt{2ax+x^2}$ $\left. - \frac{ax\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}} = \right)$ fluxioni ſpatii B A H, multatæ fluxione ſpatii A G F, per Prop. 4. hujus. Cumque hæ tres figuræ ſimul naſcantur, erit B A H — A G F = (A L H =) B L — B A H. Quare 2 B A H = B L + A G F. Unde ſequitur ſpatia B L, B A H & A G F eſſe in proportione Arithmetica.

2. Catenæ centrum gravitatis eſt omnium linearum ejuſdem longitudinis, eoſdemque terminos habentium, infimum. Nam tantum

tantum descendet grave quantum potest. Cumque tantum descendat figura, quantum ejus centrum gravitatis descendit, se sic disponet linea gravis flexilis, ut ejus centrum gravitatis sit inferius quam si aliam quamcunque figuram indueret. Atque ex hoc symptomate lineæ gravis flexilis, reliqua omnia facile deduci possent.

3. Si super quascunque Curvas eandem longitudinem eosdemque terminos D & F cum Catenaria F A D habentes, erecti Cylindrici recti secentur plano per D F transeunte; superficierum Cylindricarum sic resectarum maxima est quæ super Catenariam insistit. Hæ enim superficies (si angulus sub planis fuerit semirectus) ad ipsas Curvas (quæ sunt in casu præsenti longitudinis ejusdem) applicatæ, latitudines faciunt æquales distantiis centrorum gravitatis Curvarum à D F recta: Cum distantia hæc sit in Catenaria maxima (ob maximum descensum centri gravitatis) erit Cylindrica superficies applicanda etiam maxima. Et quoniam superficierum Cylindricarum resectarum plano cum plano baseos angulum quemvis continente, eadem est ratio atque cum dictus angulus est semirectus, patet propositum universaliter.

Lemma.

Fig. 1. SI in cujusvis Curvæ A F Q, descriptæ evolutione alterius Curvæ K V, ordinatam quamvis F B ad axem A B normalem, à correspondente in K V puncto V demittatur normalis V R ordinatæ occurrens in R: Erunt, manente fluxione axeos A B eadem, fluxio fluxionis ordinatæ B F, fluxio Curvæ A F, & recta F R continue proportionales.

Producatur rectula F t donec proximæ ordinatæ w φ occurrat in o. Et quoniam ex hypothesi F s = f w, erit o f = F f, adeoque o φ erit fluxio ipsius f s, hoc est fluxio fluxionis ordinatæ. Porro triangula o φ f, f F R sunt æquiangula, quia o φ f = alterno f F R, & f o φ = (F f r =) F f R, quia illorum intervallum R f r alterutrius respectu evanescit, cum R r præ f r nulla sit. Et igitur o φ . φ f : : f F . F R, sed φ f, f F æquales

les ſunt, cum fluxione utriuſvis tantum differant. Quare $o\varphi . fF :: fF . FR$. q. e. d.

Prop. 6. Problema.

Fig. 1. INvenire Curvam K V cujus evolutione Catenaria A F Q deſcribitur.

Vocetur ut prius A B x, item B F y. Eſt, ex Prop. 2. hujus, $\dot{y} = \frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}}$, ſive $2ax\dot{y}^2 + x^2\dot{y}^2 = a^2\dot{x}^2$. Quare, per ſatis nunc uſurpatam *Neutoni* methodum, $2a\dot{x}\dot{y}^2 + 4ax\dot{y}\ddot{y} + 2x\dot{x}\dot{y}^2 + 2x^2\dot{y}\ddot{y}$ ($= 2a^2\dot{x}\ddot{x}$ quæ, propter $\ddot{x} = o$ cum conſtans $\dot{x}$ non fluat) $= o$. Quare $\ddot{y} = \left(\frac{-a\dot{x}\dot{y} - x\dot{x}\dot{y}}{2ax+x^2} =\right) \frac{\overline{a+x}}{2ax+x^2} \frac{a\dot{x}^2}{\times\sqrt{2ax+x^2}}$, ponendo loco $\dot{y}$, ejus valorem $\frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}}$. (Nam ſignum — quantitati $\ddot{y}$ præfixum, tantum denotat locum puncti R ex F ſpectati, oppoſitum eſſe loco puncti F ex B ſpectati, cum curva A F Q eſt cava verſus axem A B) Et F f, per Prop. 2. hujus, $= \frac{\overline{a+x} \times \dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}}$. Quare per præcedens Lemma, $FR = \left(\frac{Ff\,q}{\ddot{y}} = \frac{\overline{a+x}^2 \times \dot{x}^2}{2ax+x^2} \times \frac{\overline{2ax+x^2} \times \sqrt{2ax+x^2}}{\overline{a+x} \times a\dot{x}^2} =\right) \frac{\overline{a+x} \times \sqrt{2ax+x^2}}{a}$. Rurſus ob triangula rectangula F s f, F R V habentia angulos f F s, V F R æquales, quia V F s eſt utriuſque complementum ad rectum, eſt $Fs . sf :: FR . VR$, ſive $\dot{x} . \frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}} :: \frac{\overline{a+x} \times \sqrt{2ax+x^2}}{a} :: VR$ quæ proinde æqualis $a + x$. Hæc igitur eſt natura curvæ K V, ut ſi A B vocetur x, erit $FR = \frac{\overline{a+x} \times \sqrt{2ax+x^2}}{a}$, & $VR = a + x$. q. e. i.

 Corol-

Corollaria.

1. A C . C B : : B H . F R. Hæc enim eſt proprietas rectæ F R ſuperius inventa.

2. Recta C B æqualis eſt rectæ B I ſive V R. Utraque enim eſt æqualis $a + x$.

3. Recta evolvens V F eſt tertia proportionalis ipſis A C, C B. Nam ob æquiangula triangula f F s, V F R, eſt s F . F f : : F R . V F. Sive $x . \frac{ax + xx}{\sqrt{2ax + x^2}} : : \frac{\overline{a+x} \times \sqrt{2ax + x^2}}{a}$. V F quæ proinde $= \frac{\overline{a+x}^2}{a}$. Unde $a . a + x : : a + x$. V F, quæ præterea eſt radius circuli Catenæ in F æquicurvi.

4. Cum punctum F eſt in A, ſive cum vertex evolutione deſcribitur, id eſt cum $x = 0$, valor evolventis rectæ V F quæ in hoc caſu eſt K A, nempe $\frac{\overline{a+x}^2}{a}$ fiet a: hoc eſt punctum K ubi Curva V K occurrit axi, tantum extat ſupra Catenæ verticem A, quantum C deprimitur infra eundem. Unde diameter circuli, Catenæ ad verticem æquicurvi, æqualis eſt axi conterminæ Hyperbolæ A H. Adeoque Catenæ A D & Hyperbolæ A H eadem eſt curvatura in vertice A: Nam vulgo notum eſt circulum prædictum, Hyperbolæ æquilateræ A H in vertice A æquicurvum eſſe. Sed & hoc aliunde, ex ipſa Catenæ natura Prop. 2. hujus demonſtrata, conſtat. Nam naſcens F H ſive (A P = naſcenti B P =) $\sqrt{8ax}$ dupla eſt naſcentis B H ſive ($\sqrt{2ax + x^2}$, hoc eſt, evaneſcente x^2, cum x minima ſit) $\sqrt{2ax}$; Et igitur idem punctum eſt tam in naſcente Hyperbola quam naſcente Catenaria; h. e. Naſcens Hyperbola A H cum naſcente Catenaria A D coincidit, & proinde æquicurvæ ſunt hæ lineæ ad verticem A.

5. Curva K V eſt tertia proportionalis ad rectam A C & curvam A F ſive rectam A L. Ex natura enim evolutionis, $KV = (VKA - KA = VF - KA = \frac{\overline{a+x}^2}{a} - a = \frac{a^2 + 2ax + x^2}{a} - a =) \frac{2ax + x^2}{a}$. Et igitur $a . \sqrt{2ax + x^2} : : \sqrt{2ax + x^2}$. K V.

Sed

Sed $\sqrt{2ax+x^2}$, ex Corol. 2. Prop. 2, $=$ A F. Unde A C . A F :: A F . K V.

6. Recta K I dupla est ipsius A B. Cum enim B I $=$ (B C $=$) C A $+$ A B, erit A I $=$ C A $+$ 2 A B; At A K $=$ A C, per Corol. 4. hujus; Igitur K I $=$ 2 A B.

7. Rectangulum sub A C & B R est æquale duplo spatio hyperbolico B A H. Nam F R $\times$ A C $=$ ($\frac{\overline{a+x} \times \sqrt{2ax+x^2}}{a}$ $\times a = \overline{a+x} \times \sqrt{2ax+x^2} = x \times \sqrt{2ax+x^2} + a \times \sqrt{2ax+x^2}$ $=$ A B $\times$ B H $+$ A C $\times$ B H $=$) A B $\times$ B H $+$ A C $\times$ B D $+$ A C $\times$ D H. Quare F R $\times$ A C — B D $\times$ A C, hoc est B R $\times$ A C $=$ A B $\times$ B H $+$ A C $\times$ D H. Sed, per Prop. 4. hujus, A C $\times$ D H $=$ A G F spatio. Et igitur B R $\times$ A C $=$ (A B H L $+$ A G F $=$ per Corol. 1. Prop. 5.) 2 B A H.

Prop. 7. Theorema.

Fig. 3. SI in Curva Logarithmica L A G cujus data subtangens H S æqualis rectæ a, Corol. 2. Prop. 2. hujus definitæ, sumatur punctum A cujus distantia ab H P asymptoto, nempe A C, æqualis sit subtangenti H S, & ex punctis H & P utcunque in asymptoto sumptis à puncto C æqualiter distantibus, erigantur H L, P G ordinatæ ad Logarithmicam, quarum semisummæ ponatur æqualis H D vel P F, erunt D & F ad Catenariam rectæ A C correspondentem.

Vocetur A B x, adeoque C B vel D H semisumma ordinatarum H L, P G erit $a+x$; semidifferentia earundem vocetur y. Unde H L $= a+x+y$, & P G $= a+x-y$. Cumque ex natura Logarithmicæ, C A sit inter has media proportionalis, erit $a^2 + 2ax + x^2 - y^2 = a^2$. Unde $y = \sqrt{2ax+x^2}$. Adeoque H L $= a+x+\sqrt{2ax+x^2}$ & P G $= a+x-\sqrt{2ax+x^2}$. Quare fluxio ipsius H L, sive ipsa l m est $\frac{a\dot{x}+x\dot{x}+\dot{x}\sqrt{2ax+x^2}}{\sqrt{2ax+x^2}}$.

Et ob æquiangula triangula l m L, L H S, est L H . H S : : l m . m L, unde m L sive d δ fluxio ipsius B D $= \frac{a \dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}}$. Hoc est Curva A D ex Logarithmica supradicto modo genita, ejus est naturæ, ut si axis Vocetur x, ejusque fluxio $\dot{x}$, fluxio ordinatæ B D sit $\frac{a \dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}}$. Sed hæc ipsa est proprietas Catenariæ ad quam a pertinet, Prop. 1. hujus demonstrata. Ergo Curva F A D superius descripta est hæc ipsa Catenaria. q. e. d.

Corollaria.

1. Sicut ope Logarithmorum Catenaria describitur, vice versa ope Catenariæ per ipsam rerum naturam productæ, numeri dati vel potius rationis datæ Logarithmus invenitur. Ut si posita C A unitate, cujus Logarithmus est nihilo æqualis, quæratur Logarithmus numeri C Q sive rationis inter C A & C Q; Rectis C Q & C A tertia proportionalis sit C V, ipsarumque C Q, C V semisumma C B; ex B ordinata ad Catenariam, nempe B D est Logarithmus quæsitus. Ratio ex Propositione manifesta est.

2. Vicissim si dato Logarithmo C H vel C P, quæratur correspondens numerus H L vel P G, seu ratio H L ad C A, sive P G ad C A. Ex H vel P erigatur perpendiculum Catenæ occurrens in D vel F, ipsique H D vel P F hoc est C B, fiat æqualis C R ad horizontalem A R terminata; Eritque A R semidifferentia quæsitarum L H, G P, sicut ex supra demonstrata Catenæ natura H D vel C R est earundem semisumma: (Nam in tribus quantitatibus Geometrice proportionalibus quales sunt H L, C A, P G, quadratum semisummæ extremarum multatum quadrato mediæ, æquatur quadrato semidifferentiæ extremarum.) Adeoque C R + A R, & C R — A R sunt numeri H L vel G P, dato Logarithmo C H vel C P congrui.

3. Ex demonstratione patet quod sicut H D semisumma Logarithmicæ ordinatarum H L, P G, ad C H normaliter applicata in H, est ordinata Catenariæ, sic semidifferentia earundem H L, P G, ad C A normaliter applicata in B est ordinata Hyperbolæ æquilateræ centro C vertice A descriptæ: ac proinde (per

Corol.

Corol. 2. Prop. 2. hujus) æqualis Catenæ A D. Nam $y = \sqrt{2ax + x^2}$. Cumque Corol. præced. oſtenſum ſit A R eſſe etiam ſemidifferentiam rectarum H L, P G, patet A R eſſe æqualem Catenariæ portioni A D. Unde obiter eluceſcit modus, datâ Catenâ A D, inveniendi C centrum Hyperbolæ conterminæ, vel punctum in aſymptoto Logarithmicæ G L. Nam ſi ſumatur A R æqualis Catenæ A D, & ex junctæ rectæ B R puncto medio erigatur ad ipſam B R normalis, hæc occurret B A axi Catenæ in quæſito puncto C, uti patet. Nam ſic erit C R = C B.

4. Hinc etiam ſequitur ſi B D T angulus fiat æqualis A C R, rectam D T tangere Catenariam in D. Nam ſic fiet in triangulis æquiangulis D B T, C A R; D B . B T :: C A . A R ſive huic æqualem A D curvam. Et igitur, per Corol. Prop. 1. hujus, D T tangit Catenariam.

5. Sequitur etiam ſpatium A C H D æquari rectangulo ſub C A & A R. Nam quoniam A Y D eſt, per Prop. 4. æquale rectangulo ſub C A & (A D — B D =, per Corol. 3. hujus Prop. A R — A Y =) Y R, patet propoſitum. Et quoniam C A datur, conſtat ſpatium A C H D eſſe ſicut A D curva, illiuſque fluxionem H d ſicut D d fluxio hujus.

6. Si per punctum K ubi C R ſecat H D, ducatur K Z parallela P H, rectæ A C occurrens in Z, ſumaturque C E æqualis ſemiſummæ ipſarum B C, C Z, erit E centrum Æquilibrii Curvæ F A D.

Intelligatur ſuper F A D erecta ſuperficies Cylindrici recti reſecti plano per P H ad angulos ſemirectos cum plano Curvæ F A D; Exponet hæc ſuperficies momentum Curvæ F A D ſuper axe P H libratæ, ejuſque fluxio eſt $DH \times Dd + PF \times Ff$

$$= 2BC \times A\dot{D} = 2 \times \overline{a + x} \times \frac{a\dot{x} + x\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{2a^2\dot{x} + 4ax\dot{x} + 2x^2\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}}$$

$$= \frac{a^2\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}} + \frac{a^2\dot{x} + ax\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}} + \frac{3ax\dot{x} + 2x^2\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}}$$ cujus fluens

$a \times BD + a\sqrt{2ax + x^2} + x\sqrt{2ax + x^2} = CA \times BD + CB \times AD.$ Quare $CA \times BD + CB \times AD =$ (quoniam ſimul naſcitur, dictæ ſuperficiei Cylindricæ =) momento Curvæ F A D ſuper axe P H libratæ. Unde diſtantia centri gravitatis Curvæ F A D

à

à puncto C est $\frac{CA \times BD + CB \times AD}{2AD}$ sive $\frac{1}{2}\frac{CA \times BD}{AD} + \frac{1}{2}CB$. Porro ob ZK parallelam AR, est $AD . BD :: (AR . ZK ::) CA . CZ$, unde $CZ = \frac{CA \times BD}{AD}$, & igitur CE quæ per constructionem est $= \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}CZ$, erit $= \frac{1}{2}\frac{CA \times BD}{AD} + \frac{1}{2}BC$: hoc est **Curvæ** FAD centrum gravitatis, & E punctum ex constructione definitum, æqualiter distant à C; sed & in eadem recta & versus easdem partes sita sunt, ergo coincidunt illa.

Potest & coincidentia puncti E ut supra determinati, cum centro æquilibrii Prop. 5. hujus definito, synthetice sic ostendi. Per Corol. 1. Prop. 5. $2BAX = AYD + BA \times AR$. Unde $AH + 2BAX = (ACHD + BA \times AR =$ per præced. Corol.) $AR \times CA + BA \times AR$: hoc est $BD \times AC + 2BAX = AR \times CB$; sive $BD \times AC = AR \times CB - 2BAX$. Unde $BD \times AC + AD \times BC = (AD \times BC + AR \times CB - 2BAX = 2AD \times BC - 2BAX =) 2AD \times AC + 2AD \times AB - 2BAX$. Et applicando ad 2AD, erit $\frac{1}{2}\frac{BD \times AC}{AD} + \frac{1}{2}BC = (AC + \frac{AB \times AD - BAX}{AD} =) CA + \frac{ARX}{AR}$. Sed $\frac{ARX}{AR}$ est distantia centri æquilibrii Catenæ à vertice A, per Prop. 5. hujus determinata, ac proinde, secundum dictam Prop. 5. $CA + \frac{ARX}{AR}$ est distantia puncti E à C, & $\frac{1}{2}\frac{BD \times AC}{AD} + \frac{1}{2}BC$ est ejusdem E distantia ab eodem C secundum hoc Corol. 6. Unde patet duas istas determinationes puncti E eodem recidere, quoniam $CA + \frac{ARX}{AR} = \frac{1}{2}\frac{BD \times AC}{AD} + \frac{1}{2}BC$.

7. Spatii PFADH centrum gravitatis est in I medio puncto rectæ CE. Cum centrum gravitatis fluxionis ipsius AD sive Dd & Ff, duplo magis distet à PH quam centrum gravitatis fluxionis ipsius ACHD sive DHhd & FPpf, & $\overline{Dd + Ff} \times AC$ datam, æquale $DdhH + FfpP$, patet & fluentis FAD centrum gravitatis E duplo magis distare à PH, quam fluentis PFADH centrum I. Sed libet propositum aliter & ad modum superiorum ostendere.

In-

Intelligatur ſuper figura P F A D H erectus Cylindricus rectus & reſectus plano per P H tranſeunte, cum plano baſeos angulum ſemirectum comprehendente; exponet iſtud ſolidum, momentum figuræ P F A D H ſuper axe P H libratæ: Hujuſq; ſolidi ſive prædicti momenti fluxio, (ſolida nempe erecta ſuper P F f p & H D d h) producitur, ſi momentum fluxionis, ſive fluxio momenti ipſius A D, ducatur in $\frac{1}{2}$ A C datam. Nam per Corol. 5. hujus Prop. H D d h = D d × A C: Quare ipſum momentum fluens producitur ducendo momentum Curvæ F A D reſpectu axis P H, ſuperiore Corol. determinatum, nempe C A × B D + C B × A D, in $\frac{1}{2}$ A C; eritq; proinde $\frac{1}{2}$ A C × A C × B D + $\frac{1}{2}$ A C × C B × A D. Adeoque ſi hoc applicetur ad figuram libratam P F A D H ſive 2 C A × A D per hujus Prop. Corol. 5, fiet diſtantia centri gravitatis figuræ P F A D H ab axe P H $= \left(\frac{1}{4}\frac{CA \times BD}{AD} + \frac{1}{4} CB =\right)$ dimidiæ rectæ C E ſuperius determinatæ.

8. Si per N punctum ubi D T tangens Catenariam in D, ſecat A R, ducatur recta parallela ipſi B C, occurrens rectæ per E ad A R parallelæ in O; erit O centrum gravitatis curvæ A D. Nam per Corol. 6, centrum gravitatis curvæ A D eſt in recta E O, ſed demonſtrabitur illud eſſe in N O recta, & proinde erit ipſum O punctum. Intelligatur D A librari circa H L axem; hujus momentum eſt curva D A ducta in diſtantiam centri gravitatis ab H L: Et ejus proinde fluxio = D A × H h (H h eſt fluxio diſtantiæ axis librationis à gravitatis centro) $= \sqrt{2ax + x^2} \times \frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}} = a\dot{x}$. Ac proinde ipſum momentum Curvæ gravis D A circa axem H L libratæ = a x. Et igitur diſtantia centri gravitatis ab eodem axe eſt a x applicata ad A D, ſive $\frac{AC \times DY}{AR}$ Sed quia D T tangit Catenariam, per Corol. 4. hujus Prop. angulus B D T ſive D N Y = A C R, & anguli ad A & Y ſunt recti, quare in triangulis æquiangulis R A C, D Y N; R A . A C :: D Y . Y N. Unde $YN = \frac{AC \times DY}{RA}$, hoc eſt Y N eſt diſtantia centri gravitatis Catenæ A D ab axe H L, ſive centrum prædictum eſt in recta N O.

9. Si

9. Si per I ducatur recta ad A R parallela, rectæ O N productæ occurrens in W, erit W centrum gravitatis spatii A C H D. Nam per Corol. 7. centrum gravitatis spatii A C H D est in recta I W, sed ut mox ostendetur, est in N W, & proinde est ipsum W punctum. Eodem enim modo quo in Corol. præced. fluxio momenti spatii A C H D circa H L librati ostenditur esse

$$(ACHD \times H\dot{h} = AC \times AD \times H\dot{h} = ax \times \sqrt{2ax+x^2} \times \frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}}$$
$$= a^2\dot{x}.$$ Ac proinde ipsum momentum spatii A C H D circa axem H L librati, æquale est fluenti cujus $a^2\dot{x}$ est fluxio, hoc est ipsi a^2x. Hoc igitur applicatum ad ipsum spatium A C H D sive $ax \times \sqrt{2ax+x^2}$, dat distantiam centri gravitatis spatii A C H D ab H L $= \frac{ax}{\sqrt{2ax+x^2}} = \frac{AC \times DY}{RA}$. Sed Corol. præced. ostensa est $YN = \frac{AC \times DY}{RA}$. Et igitur centrum gravitatis spatii A C H D est in N W. Atque ex duobus hisce ultimis Corollariis invenitur centrum gravitatis cujusvis portionis Catenæ etiam ad verticem A non pertingentis; vel cujusvis spatii Catenariæ portione quavis, & aliis rectis præter prædictas comprehensi.

10. Hinc mensurantur superficies & solida genita rotatione Catenæ, aut spatii sub illa & rectis comprehensi, circa axes datos. Nam figura rotatione genita æquatur, uti vulgo notum, figuræ rotatæ ductæ in peripheriam à centro gravitatis inter rotandum percursam, etiam datam cum detur illius radius sive distantia centri gravitatis ab axe dato. Sic si Catena A D rotetur circa axem A B, $\frac{\pi}{\rho}$ A N est peripheria à centro gravitatis O percursa, ($\frac{\pi}{\rho}$ denotat rationem peripheriæ circuli ad semidiametrum) adeoq; superficies rotatione Catenæ A D genita $= (\frac{\pi}{\rho} \times AN \times AD =)$ $\frac{\pi}{\rho} \times AN \times AR$. Hoc est circulus cujus radius potest duplum rectangulum R A N, æquabitur superficiei à Catenæ A D rotatione circa axem A B genitæ. Pari modo solidum genitum rotatione spatii A C H D circa A C, æquale ostendetur Cylindro cujus basis est prædictus circulus, altitudo vero æqualis A C. Similiterque superficies & solida, ex rotatione harum figurarum circa alios quosvis datos axes facta mensurantur. Nam dato centro gravitatis hæc non latebunt.

III.